Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2010/11
08.02.2011

Klausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existiert jede Richtungsableitung von f.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   b) Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ gelten die Implikationen: sternförmig $\Rightarrow$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ konvex.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   c) Durch $||x|| = |x_1| + |x_2 x_3|$ wird eine Norm auf $\mathbb{K}^3$ definiert.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   d) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit der Standardmetrik) ist kompakt.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ konform, so ist f überall lokal umkehrbar.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

2. Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz genau. (5 P.)

Bitte wenden!

3. Es seien $r > 0, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$ und $S = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ (Schraubenlinie oder Helix).

   a) Berechnen Sie für $a < b$ die Bogenlänge $L_a^b(\gamma)$. (4 P.)

   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Kosinus des Schnittwinkels der Schraubenlinie mit dem Kreis $K = \{(r\cos(t), r\sin(t), 0) : t \in \mathbb{R}\}$. (5 P.)

4. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = x(x-1)^2 - 2y^2$.

   a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . (4 P.)

   b) Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen lokale Extrema vorliegen, und entscheiden Sie ggf., ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt. (4 P.)

   c) Besitzt f globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P.)

5. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}.$$

(6 P.)

6. a) Bestimmen Sie eine differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derart, dass $\operatorname{grad} \phi(x, y, z) = (yz, zx, xy)$. (2 P.)

   b) Für die Funktion ϕ aus Teil (a) berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(x_0, y_0, z_0)$ nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 2)$. (2 P.)

   c) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gibt mit $\operatorname{grad} \phi(x, y, z) = (xy, yz, zx)$. (4 P.)

   d) Gibt es überhaupt eine differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \phi(x, y, z) = (xy, yz, zx)$? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P.)

7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = xy + x^3 \qquad\qquad y(0) = y_0$$

(8 P.)

Die Klausur gilt mit 28 (bzw. mit 22) Punkten als bestanden.